Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

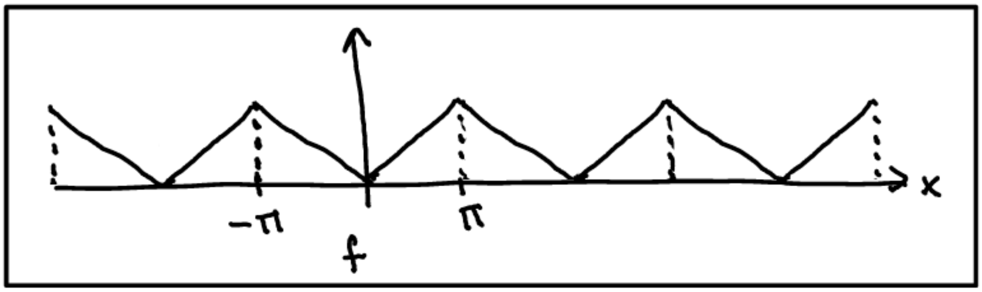
Carné: __________ Sección: _____

Matemáticas VII (MA-3111) Intensivo 2015 2do. Examen Parcial (25 %)

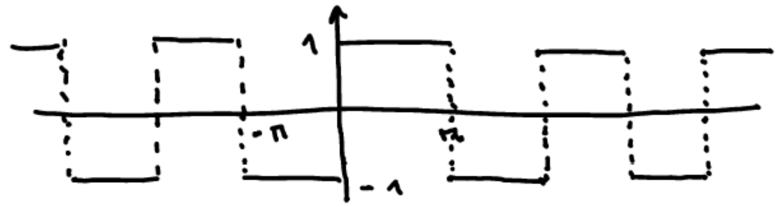
1. (25 puntos) Sea $f(x) = |x|$, si $-\pi < x < \pi$, y 2π-periódica. Se sabe que f tiene el siguiente desarrollo en serie de Fourier: $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$.
   (a) Use operaciones de series de Fourier para hallar el desarrollo en series de Fourier de las siguientes funciones 2π-periódicas:
      I. $\begin{cases} -1, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ 1, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$
      II. $\begin{cases} 0, & \text{si } -\pi < x < 0; \\ 4, & \text{si } 0 < x < \pi. \end{cases}$
      III. $x(\pi - |x|)$, si $-\pi < x < \pi$.
      IV. $x^2(2|x| - 3\pi)$, si $-\pi < x < \pi$.
   (b) Calcule la suma de las siguientes series:
      I. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$
      II. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$
      III. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$
      IV. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$

¡Justifique Todas Sus Respuestas!
Respuesta sin justificación carecerá de valor.

(a.I)



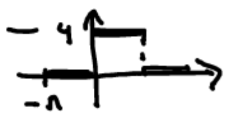
Como f es suave a trozos y continua podemos derivar su S.F.



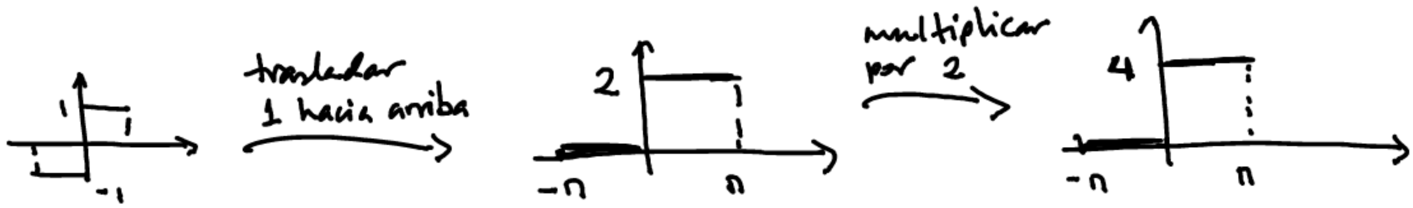
$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Así para la función de la parte (a.I) se obtiene la S.F.

$$\boxed{\begin{cases} 1, & \text{si } 0 < x < \pi \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases} \sim \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)}} \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi]$$

(a.II) Esta función  se puede obtener de la anterior trasladando:

$$\begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)}, \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi]$$



+1 $\Rightarrow$
$$\begin{cases} 2; & 0 < x < \pi \\ 0; & -\pi < x < 0 \end{cases} = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)}$$

×2 $\Rightarrow$
$$\boxed{\begin{cases} 4; & 0 < x < \pi \\ 0; & -\pi < x < 0 \end{cases} \sim 2 + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)}}, \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi]$$

(a.III) Para $f(x)=|x|$ tenemos que $c_0=\frac{\pi}{2}\neq 0$ Consideremos entonces

$$f(x)-\frac{\pi}{2}\sim -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$$

y

$$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{\pi}{2}\right)dt=\int_0^x\left(|t|-\frac{\pi}{2}\right)dt=\begin{cases}\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x, & \text{si } 0<x<\pi\\ -\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{2}x, & \text{si } -\pi<x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}x^2/2 ; & 0<x<\pi\\ -x^2/2 ; & -\pi<x<0\end{cases}-\frac{\pi}{2}x$$

$$=\frac{x}{2}\begin{cases}x ; & 0<x<\pi\\ -x ; & -\pi<x<0\end{cases}-\frac{\pi}{2}x=\frac{x}{2}|x|-\frac{\pi}{2}x ;\quad -\pi<x<\pi$$

Así, integrando tenemos

$$F(x)=\frac{x}{2}|x|-\frac{\pi}{2}x\sim K_0-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Sen}((2n-1)x)}{(2n-1)^3}$$

donde $K_0=\frac{\langle F,1\rangle}{\|1\|^2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x}{2}(|x|-\pi)dx=0$ pues el integrando es impar.

Luego

$$\boxed{x(|x|-\pi)\sim -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Sen}((2n-1)x)}{(2n-1)^3}} \text{ en } L^2[-\pi,\pi]$$

(a.IV) Partimos de la SF de la parte (a.III), como en este caso $c_0=0$, podemos usar directamente la integración de series:

Sea

$$G(x)=\int_0^x t(|t|-\pi)dt=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{\pi x^2}{2}, & \text{si } 0<x<\pi\\ -\frac{x^3}{3}-\frac{\pi x^2}{2}; & \text{si } -\pi<x<0\end{cases}$$

$$=\frac{x^2}{3}\begin{cases}x; & 0<x<\pi\\ -x; & -\pi<x<0\end{cases}-\frac{\pi}{2}x^2=\frac{x^2}{3}|x|-\frac{\pi}{2}x^2,\quad -\pi<x<\pi$$

Por integración

$$x^2\left(\frac{|x|}{3}-\frac{\pi}{2}\right)\sim K_0+\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4},\quad -\pi<x<\pi$$

donde $K_0 = \frac{\langle G,1\rangle}{\|1\|^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\left(\frac{|x|}{2}-\frac{\pi}{2}\right)dx = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2(x-\pi)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^4}{4}-\frac{\pi^4}{3}\right) = -\frac{\pi^3}{12}$$

Finalmente

$$\boxed{x^2(2|x|-3\pi) \sim -\frac{\pi^3}{2} + \frac{48}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^4}} \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi].$$

(b.I) Consideramos la S.F. obtenida en (a.I) y el Teorema de convergencia puntual

Sea $x=\pi/2$. Como la función es continua en $\pi/2$ y allí vale 1

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\pi/2)}{(2n-1)}, \quad \text{pero } \sin\left((2n-1)\tfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}}$$

(b.II) Usamos el dato y el Teorema de convergencia puntual con $x=0$. Como la función es continua en $x=0$ obtenemos

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

(b.III) Usamos la función de (a.III) y la identidad de Parseval de $L^2[-\pi,\pi]$:

$$\|x(|x|-\pi)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{-8}{\pi(2n-1)^3}\sin((2n-1)x)\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64}{\pi^2(2n-1)^6}\|\sin((2n-1)x)\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{64\cdot\pi}{\pi^2(2n-1)^6}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi\,\|x(|x|-\pi)\|^2}{64}$. Ahora calculamos la norma

$$\| x(|x|-\pi)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |x(|x|-\pi)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2(|x|-\pi)^2 dx = 2\int_0^{\pi} x^2(x-\pi)^2 dx$$

$$= 2\int_0^{\pi} x^4 - 2\pi x^3 + \pi^2 x^2 \, dx = 2\left[\frac{\pi^5}{5} - \frac{2\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{3} \right]$$

$$= 2\pi^5 \left[\frac{12-30+20}{5\cdot 4\cdot 3} \right] = \frac{\pi^5}{15}$$

$15\cdot 64 = 640+320$
$= 960$

Así $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}}$$

(b.IV) Usemos (a.IV) y el Teorema de convergencia puntual con $x=0$.
La función es $x^2(2|x|-3\pi)$, $x\in(-\pi,\pi)$, en $x=0$ los límites laterales son iguales a cero.
(De hecho la función es continua en $x=0$). Así

$$0 = \frac{-\pi^3}{3} + \frac{48}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$48\cdot 3 = 120+24$
$= 144$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{144}}$$

Obs: • (b.IV) también se puede resolver usando el dato y Parseval.
• (b.II) También se puede resolver usando (a.I) o (a.II) y Parseval.